VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

*Сибирский журнал
индустриальной математики
Апрель–июнь, 2002. Том V, № 2(10)*

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ АЛЮМИНИЕВОГО ЭЛЕКТРОЛИЗЕРА

В. В. Альчиков, Р. В. Бикмурзин, В. И. Быков

Для проектирования алюминиевых электролизеров необходима информация о распределении магнитостатических полей в ваннах электролизеров. Описаны методы численного моделирования магнитных полей отдельно от каждого токонесущего элемента, намагниченных стальных конструкций электролизера и соседних электролизеров. Обсуждаются результаты расчетов.

1. Введение

Процесс электролиза алюминия сопровождается сложным комплексом физико-химических явлений, одним из которых является сильное магнитное поле внутри активной зоны электролизера [1, 2].

В результате взаимодействия электрического тока и магнитного поля в ванне электролизера появляется электромагнитная сила, приводящая находящийся там расплав в движение, что влияет на эффективность электролиза. Поэтому при проектировании новых и модернизации старых конструкций алюминиевых электролизеров важной задачей является изучение характера распределения магнитного поля в зоне расплава. Для этих целей могут быть успешно использованы методы численного моделирования магнитных полей.

Рассмотрим конструкцию алюминиевого электролизера. Он состоит из анода, катода и ошиновки (рис. 1).

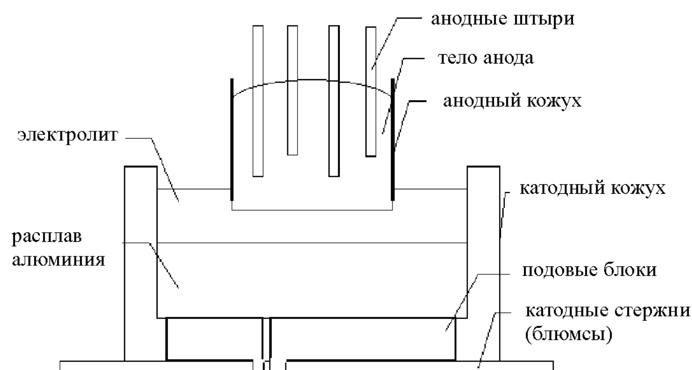


Рис. 1. Поперечный срез электролизера

© 2002 **Альчиков В. В., Бикмурзин Р. В., Быков В. И.**

Постоянный электрический ток по анодной ошиновке поступает на анод, проходит через электролит, расплав алюминия, подину, собирается с катодных стержней (блюмсов) ошиновкой и подается на анод следующего электролизера.

Первичным источником магнитного поля в электролизере является электрический ток, протекающий в токонесущих конструкциях — блюмсах, катодных спусках, шинах, стояках, соединительных пакетах, анодных блоках, шинах и т. д., а также ток, протекающий в объеме электролита и расплава металла.

Вторым фактором, влияющим на результирующее магнитное поле, является наличие вблизи от активной зоны электролизера ферромагнитных конструкции — кожуха ванны, анодных балок, а также элементов жесткости электролизера — контрфорсов, несущих балок и т. д., способных намагничиваться под действием внешнего магнитного поля. В целом, вклад намагниченных конструкций в результирующее магнитное поле в межполюсном пространстве сравним по абсолютной величине с вкладом токонесущих элементов. Поэтому при численном моделировании магнитного поля электролизера необходимо учитывать влияние его ферромагнитных деталей.

Следует отметить еще один фактор формирования магнитного поля. На заводах по производству алюминия электролизеры располагаются рядами, причем расстояние между соседними установками соизмеримо с размерами самой электролизной ванны. Поэтому при расчете поля следует учитывать влияние ближайших соседей исследуемого электролизера.

Для численного моделирования магнитного поля в алюминиевом электролизере используются основные уравнения магнитостатики.

2. Основные уравнения магнитостатики электролизера

Стационарное магнитное поле определяется из уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \tag{1}$$

где $\vec{B} = \vec{B}(x,y,z)$, $\vec{H} = \vec{H}(x,y,z)$, $\vec{J} = \vec{J}(x,y,z)$ — соответственно векторы магнитной индукции, напряженности магнитного поля, объемной плотности тока.

Векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ связаны между собой функциональной зависимостью. Если пренебречь гистерезисом и считать среду изотропной, то эта связь имеет вид

$$\vec{B} = \mu_0 \mu(H) \vec{H}, \tag{2}$$

где $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость вакуума, $\mu(H)$ — относительная магнитная проницаемость, которая характеризует материальные свойства среды и определяется в результате обработки экспериментальных данных [3]. Вместо $\mu(H)$ обычно используют величину $\chi(H) = \mu(H) - 1$, называемую магнитной восприимчивостью.

Помимо этого введем вектор намагниченности $\vec{M} = \vec{M}(x,y,z)$, который связан с $\vec{B}$ и $\vec{H}$ следующим соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \tag{3}$$

Ограничимся рассмотрением трех типов сред: воздух ($\mu = 1$, $\vec{J} = 0$), проводник из немагнитного материала с током ($\mu = 1$, $\vec{J} \neq 0$), ферромагнитный материал без токов ($\mu = \mu(H)$, $\vec{J} = 0$).

На границе раздела сред должны выполняться условия непрерывности касательной составляющей вектора напряженности и нормальной компоненты вектора индукции магнитного поля:

$$H_t^+ = H_t^-, \quad B_n^+ = B_n^-.$$

Кроме этого, при бесконечном удалении от источников магнитное поле должно обращаться в нуль.

Из уравнений (1) может быть получена формула Био — Савара — Лапласа:

$$\vec{B} = k \int\limits_V \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3}\, dV, \tag{4}$$

где V — заданный ограниченный объем с током, $\vec{j}$ — вектор плотности тока, $\vec{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку проводника с точкой наблюдения,

$$r = |\vec{r}|, \quad k = \frac{\mu_0}{4\pi}.$$

Для линейных проводников с током из (4) следует формула

$$\vec{B} = k \int\limits_l \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}, \tag{5}$$

где $\vec{dl}$ — вектор бесконечно малой длины, направление которого совпадает с направлением тока I. Данная формула положена в основу численных моделей магнитного поля от ошиновки.

3. Численное моделирование магнитного поля от ошиновки

Для расчета магнитного поля от ошиновки электролизера используется система координат, привязанная к исследуемому электролизеру. Начало координат помещается в центральную точку верхней плоскости подины. Ось OX направляется по ходу тока серии электролизеров, ось OZ — вертикально вверх, ось OY — так, чтобы система координат была правой.

Каждый пакет шин заменяется линейным проводником (рис. 2). Считается, что токи протекают вдоль осей проводников. Проводники катодной и анодной ошиновки разбиваются на отдельные участки с постоянным или с линейно нарастающим током. Для каждого проводника задаются координаты концов и токи на концах. Используя (5) и принцип суперпозиции, можно вычислить магнитное поле любых систем линейных проводников с током.

Из (5) получаем формулу для вычисления напряженности магнитного поля H, создаваемого линейным проводником, параллельным оси OX, с координатами концов (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) в точке P с координатами (x_0, y_0, z_0), находящейся на расстоянии R_0 от этого тока:

$$H = \frac{1}{4\pi} R_0(\Delta I S_1 + N S_2), \tag{6}$$

где S_1 и S_2 являются табличными интегралами

$$S_1 = \int\limits_{X_1}^{X_2} \frac{x dx}{(R_0^2 + (x - x_0)^2)^{3/2}} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{x_0(x_0 - x_1)}{R_0^2 R_1} - \frac{x_0(x_0 - x_2)}{R_0^2 R_2}, \tag{7}$$

$$S_2 = \int\limits_{X_1}^{X_2} \frac{dx}{(R_0^2 + (x - x_0)^2)^{3/2}} = \frac{x_2 - x_0}{R_0^2 R_2} - \frac{x_1 - x_0}{R_0^2 R_1}, \tag{8}$$

$$R_0 = \sqrt{(y_0 - y_1)^2 + (x_0 - x_1)^2}, \quad R_i = \sqrt{R_0^2 + (x_i - x_0)^2}. \tag{9}$$

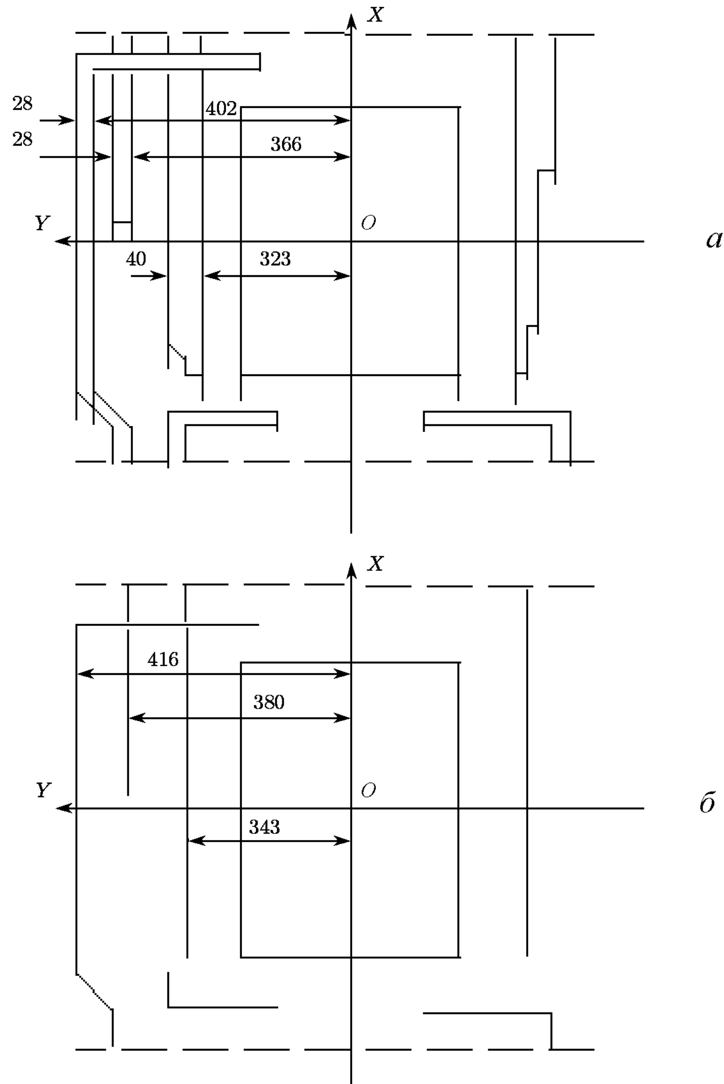


Рис. 2. Схема замещения объемных (*а*) проводников линейными (*б*)

Для компонент напряженности магнитного поля имеем

$$H_x = 0, \quad H_y = H\frac{z_0 - z_1}{R_0}, \quad H_z = -H\frac{y_0 - y_1}{R_0}, \tag{10}$$

где H определяется из (6).

Расчет магнитного поля, создаваемого током в проводнике, параллельным оси OY, проводится аналогичным образом:

$$H_y = 0, \quad H_x = H\frac{z_0 - z_1}{R_0}, \quad H_z = -H\frac{x_0 - x_1}{R_0}. \tag{11}$$

Для проводника, параллельного оси OZ, имеем

$$H_z = 0, \quad H_x = H\frac{z_0 - z_1}{R_0}, \quad H_y = -H\frac{y_0 - y_1}{R_0}. \tag{12}$$

Обычно рассматриваются элементы ошиновки, параллельные осям координат или координатным плоскостям. Расчеты проводника ошиновки произвольного направления сводят к расчету трех проводников, параллельных осям координат.

Рассмотрим новый алгоритм расчета магнитного поля от тока в линейном проводнике произвольного направления. Для этого введем систему координат с началом в точке наблюдения $O'(x_0, y_0, z_0)$ и осью $O'X'$, имеющей направление вектора $\vec{l}$, соединяющего концы проводника. Ось $O'Y'$ направим от O' к точке — проекции вектора $\vec{l}$ на плоскость, перпендикулярную оси $O'X'$.

В новой системе координаты концов проводника x'_i, y'_i, z'_i $(i = 1, 2)$ определяются через соответствующие координаты x_i, y_i, z_i и точки наблюдения x_0, y_0, z_0 в старой системе:

$$x'_1 = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y'_1 = y'_2 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - x_1'^2}, \quad z'_1 = z'_2 = 0,$$

где

$$a = x_2 - x_1, \quad b = y_2 - y_1, \quad c = z_2 - z_1, \quad d = -ax_0 - by_0 - cz_0,$$
$$a_1 = x_0 - x_1, \quad b_1 = y_0 - y_1, \quad c_1 = z_0 - z_1.$$

Приведем окончательную формулу для вычисления напряженности магнитного поля:

$$H = \frac{1}{4\pi} y'_1 (\Delta I C_1 + K C_2), \tag{13}$$

где

$$C_1 = \int\limits_{x'_1}^{x'_2} \frac{x'}{(y_1'^2 + x'^2)^{3/2}}\, dx' = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2},$$

$$C_2 = \int\limits_{x'_1}^{x'_2} \frac{dx'}{(y_1'^2 + x'^2)^{3/2}} = \frac{1}{y_1'^2} - \left(\frac{x'_2}{R_2} - \frac{x'_1}{R_1} \right),$$

$$R_i = \sqrt{y_1'^2 + x_i'^2}, \ i = 1, 2, \quad \Delta I = \frac{I_2 - I_1}{x'_2 - x'_1}, \quad K = I_1 - \Delta I x'_1.$$

Направление вектора $\vec{H}$ совпадает с направлением вектора $\vec{A} = [\vec{l} \times \vec{R_1}]$. Вектор $\vec{l}$ имеет координаты (a, b, c), а вектор $\vec{R_i}$ — координаты a_i, b_i, c_i. Таким образом,

$$\vec{A} = [\vec{l} \times \vec{R_1}] = (bc_1 - cb_1, ca_1 - ac_1, ab_1 - ba_1). \tag{14}$$

После этого вектор $\vec{H}$ может быть определен как произведение единичного вектора, имеющего направление вектора $\vec{A}$, на величину H:

$$\vec{H} = H \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}. \tag{15}$$

В полученном алгоритме число операций то же, что и при вычислении напряженности магнитного поля от тока в проводнике, параллельном какой-либо одной координатной оси.

4. Численное моделирование магнитного поля от токов в расплаве

Для напряженности магнитного поля в расплаве из (4) имеем

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \frac{[\vec{\jmath}(\vec{r}) \times \vec{r}]}{r^3}\, dV. \qquad (16)$$

Использование этой формулы связано с большим временем счета, которое можно значительно сократить, если от интегрирования по объему V перейти к интегрированию по поверхности S, ограничивающей данный объем.

Справедливы следующие равенства:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\vec{\jmath}}{r}\right) = \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}\,\vec{\jmath} + \frac{[\vec{\jmath}(r) \times r]}{r^3},$$

в чем можно убедиться, выполняя непосредственно операции взятия ротора, и $\mathrm{rot}\,\vec{\jmath} = 0$ для стационарного тока. Из этих равенств следует

$$\frac{[\vec{\jmath}(r) \times \vec{r}]}{r^3} = \mathrm{rot}\left(\frac{\vec{\jmath}}{r}\right).$$

Таким образом, вместо (16) можно записать

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \mathrm{rot}\left(\frac{\vec{\jmath}}{r}\right) dV. \qquad (17)$$

Используя теорему о роторе

$$\int\limits_V \mathrm{rot}(\vec{a})\, dV = \iint\limits_S [\vec{a} \times \vec{n}]\, dS,$$

получаем окончательно

$$\vec{H}(r) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{[\vec{\jmath}(\vec{r}) \times \vec{n}]}{r}\, dS, \qquad (18)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V, $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности S в точке интегрирования.

Так как подынтегральная функция должна быть непрерывной, то для слоистой среды интеграл (18) следует разбить на два интеграла по каждому слою отдельно. Для каждого слоя под S следует понимать совокупность поверхностей, ограничивающих данный слой. Для электролизера — это поверхность раздела «жидкий алюминий — электролит». По разные стороны этой поверхности наблюдается разрыв непрерывности тангенциальных составляющих плотностей токов.

Пусть $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор внешней нормали к границе слоя в точке, расположенной на этой границе. Из (18) следует

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{j_y n_z - j_z n_y}{r} \vec{I_x} + \frac{j_x n_x - j_x n_z}{r} \vec{I_y} + \frac{j_x n_y - j_y n_x}{r} \vec{I_z} \right) dS,$$

или в компонентах

$$H_x = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{j_y n_z - j_z n_y}{r}\, dS,$$

$$H_y = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{j_z n_x - j_x n_z}{r}\, dS, \qquad (19)$$

$$H_z = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{j_x n_y - j_x n_x}{r}\, dS.$$

Учитывая равенство нулю компонент n_x, n_y на горизонтальных плоскостях, n_x, n_z — на плоскостях, перпендикулярных к оси OY, и n_y, n_z — на плоскостях, перпендикулярных OX, из (19) получаем

$$
\begin{aligned}
H_x &= \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\iint\limits_{Y=Y_2}\frac{j_z}{r}\,dxdz + \sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}\iint\limits_{Z=Z_k}\frac{j_y}{r}\,dxdy\right),\\
H_y &= \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j}\iint\limits_{X=X_1}\frac{j_z}{r}\,dydz + \sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}\iint\limits_{Z=Z_k}\frac{j_x}{r}\,dxdy\right),\\
H_z &= \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j}\iint\limits_{X=X_2}\frac{j_y}{r}\,dydz + \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j}\iint\limits_{Y=Y_j}\frac{j_x}{r}\,dxdz\right).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Для каждого двойного интеграла в (20) указывается, по какой плоскости осуществляется интегрирование. Индекс 1 у x, y относится к боковым граням с минимальными значениями соответствующих переменных, 2 — с максимальными. Индексы 1, 4 у z соответствуют нижней плоскости жидкого металла и верхней плоскости электролита соответственно, индексы 2, 3 — плоскости раздела «жидкий металл — электролит». (При $z = z_2$ компоненты j_x, j_y вычислены для электропроводности $\sigma_{\text{м}}$ жидкого металла, при $z = z_3$ — для электропроводности $\sigma_{\text{э}}$ электролита.)

На поверхности раздела $z = H_1$ компоненты j_x, j_y имеют скачок, поэтому для электролита $n_z = n_y = 0$, $n_z = -1$ при $z = H_1 + 0$, а для жидкого металла $n_z = n_y = 0$, $n_z = 1$ при $z = H_1 - 0$, причем

$$\sigma_{\text{э}}^{-1} j_r\big|_{z=H_1+0} = \sigma_{\text{м}}^{-1} j_r\big|_{x=H_1-0},$$

где $j_r = (j_x, j_y)$.

Для вычисления интегралов (20) граничные плоскости разбиваются с помощью узловых линий

$$x = x_i,\ i = \overline{1, N}, \quad y = y_j,\ j = \overline{1, M}, \quad z = z_k,\ k = \overline{1, L},$$

на элементарные ячейки

$$x_{i-1} \le x \le x_i, \quad y_{j-1} \le y \le y_j, \quad z_{k-1} \le z \le z_k.$$

Каждый из интегралов (20) представим в виде суммы интегралов по элементарным ячейкам. Внутри ячейки составляющие j интерполируются линейно.

При $y = y_1, y_{\text{м}}$ получаем

$$
\begin{gathered}
j_z(x,y,z) = \frac{1}{x_i - x_{i-1}}[(x - x_{i-1})j_z|_{i,j,k-1/2} - (x - x_i)j_z|_{i-1,j,k-1/2}],\\
j_x(x,y,z) = \frac{1}{z_i - z_{k-1}}[(z - z_{k-1})j_x|_{i-1/2,j,k} - (z - z_k)j_x|_{i-1/2,j,k-1}],\\
x_{i-1} \le x \le x_i,\ i = \overline{2, N}, \quad z_{k-1} \le z \le z_k,\ k = \overline{2, L},
\end{gathered}
$$

где значки $i - 1/2$, $k - 1/2$ означают, что соответствующие компоненты плотностей токов j_x, j_z вычислены в серединах сторон ячеек, параллельных осям OX и OZ соответственно.

При $x = x_1, x_2$ получаем

$$j_x(x,y,z) = \frac{1}{z_k - z_{k-1}}[(z - z_{k-1})j_y|_{i,j-1/2,k} - (z - z_k)j_y|_{i,j-1/2,k-1}],$$
$$j_z(x,y,z) = \frac{1}{y_j - y_{j-1}}[(y - y_{j-1})j_z|_{i,j,k-1/2} - (y - y_j)j_z|_{i,j-1,k-1/2}],$$
$$y_{j-1} \le y \le y_j,\ j = \overline{2,M}, \quad z_{k-1} \le z \le z_k,\ k = \overline{2,L},$$

где значок $j - 1/2$ означает, что компоненты плотностей токов j_y вычислены в серединах сторон ячеек, параллельных оси OX.

При $z = z_i$, $i = \overline{1,4}$, получаем

$$j_x(x,y,z) = \frac{1}{y_j - y_{j-1}}[(y - y_{j-1})j_x|_{i-1/2,j,k} - (y - y_j)j_x|_{i-1/2,j-1,k}],$$
$$j_y(x,y,z) = \frac{1}{x_i - x_{i-1}}[(x - x_{i-1})j_y|_{i,j-1/2,k} - (x - x_i)j_y|_{i-1,j-1/2,k}],$$
$$x_{i-1} \le x \le x_i,\ i = \overline{2,N}, \quad y_{j-1} \le y \le y_j,\ j = \overline{2,M}.$$

Подставляя записанные выше выражения для компонент тока в (20), получим интегралы, которые могут быть определены аналитически и численно.

Так как по осям OX, OY мы предполагаем шаги разбиений равными, то $x_i - x_{i-1} = hx$, $y_j - y_{j-1} = hy$. Разности $z_k - z_{k-1}$ обозначим через hz_k. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} J1_k &= \iint\limits_{Z-Z_k} \frac{J_y}{r}\,dxdy, \quad J2_j = \iint\limits_{Y-Y_j} \frac{J_z}{r}\,dxdz, \quad J3_i = \iint\limits_{X-X_i} \frac{J_x}{r}\,dydz, \\ J4_k &= \iint\limits_{Z-Z_k} \frac{J_x}{r}\,dxdy, \quad J5_j = \iint\limits_{Y-Y_j} \frac{J_x}{r}\,dxdz, \quad J6_i = \iint\limits_{X-X_i} \frac{J_y}{r}\,dydz. \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда выражения (20) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}J1_k + \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}J2_j\right), \\ H_y &= \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i}J3_i + \sum_{k=1}^{4}(-1)^{k}J4_k\right), \\ H_z &= \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j}J5_j + \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i}J6_i\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Формулы для аналитического интегрирования здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Для экономии времени счета аналитическое интегрирование следует проводить только в окрестности сингулярности подынтегральной функции, т. е. при выполнении условий

$$|i_p - i| \le i_0, \quad |j_p - j| \le j_0, \quad |k_p - k| \le k_0,$$

где i_p, j_p, k_p — индексы координат точки наблюдения x_{i_p}, y_{j_p}, z_{k_p}; i, j, k — индексы координат точки интегрирования x_i, y_j, z_k; i_0, j_0, k_0 — некоторые заданные целые числа. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то

интеграл вычисляется приближенно, с использованием квадратурных формул прямоугольника или трапеции:

$$J1_k = \iint\limits_{Z=Z_k} \frac{j_y}{r}\,dxdy = \sum_{i=2}^{N}\sum_{k=2}^{L}\frac{hxhy}{2}\left[\frac{j_y|_{i,j-1/2,k}}{\sqrt{\tilde{x}_i^2+\tilde{y}_{j-1/2}^2+\tilde{z}_k^2}}+\frac{j_y|_{i-1,j-1/2,k}}{\sqrt{\tilde{x}_{i-1}^2+\tilde{y}_{j-1/2}^2+\tilde{z}_k^2}}\right],$$

$$J2_j = \iint\limits_{Y=Y_j} \frac{j_x}{r}\,dxdz = \sum_{i=2}^{N}\sum_{k=2}^{L}\frac{hz_k hx}{2}\left[\frac{j_z|_{i,j,k-1/2}}{\sqrt{\tilde{x}_i^2+\tilde{y}_j^2+\tilde{z}_{k-1/2}^2}}+\frac{j_y|_{i-1,j-1/2,k}}{\sqrt{\tilde{x}_{i-1}^2+\tilde{y}_{j-1/2}^2+\tilde{z}_{k-1/2}^2}}\right],$$

$$J3_i = \iint\limits_{X=X_i} \frac{j_z}{r}\,dydz = \sum_{j=2}^{M}\sum_{k=2}^{L}\frac{hz_k hy}{2}\left[\frac{j_x|_{i,j,k-1/2}}{\sqrt{\tilde{x}_i^2+\tilde{y}_j^2+\tilde{z}_{k-1/2}^2}}+\frac{j_x|_{i,j-1,k-1/2}}{\sqrt{\tilde{x}_i^2+\tilde{y}_{j-1}^2+\tilde{z}_{k-1/2}^2}}\right],$$

$$J4_k = \iint\limits_{Z=Z_k} \frac{j_x}{r}\,dxdy = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=2}^{M}\frac{hxhy}{2}\left[\frac{j_x|_{i-1/2,j-1,k}}{\sqrt{\tilde{x}_{i-1/2}^2+\tilde{y}_{j-1}^2+\tilde{z}_k^2}}+\frac{j_x|_{i-1/2,j,k}}{\sqrt{\tilde{x}_{i-1/2}^2+\tilde{y}_j^2+\tilde{z}_k^2}}\right],$$

$$J5_j = \iint\limits_{Y=Y_j} \frac{j_x}{r}\,dxdz = \sum_{i=2}^{N}\sum_{k=2}^{L}\frac{hx_k hx}{2}\left[\frac{j_x|_{i-1/2,j,k-1}}{\sqrt{\tilde{x}_{i-1/2}^2+\tilde{y}_j^2+\tilde{z}_{k-2}^2}}+\frac{j_x|_{i-1/2,j,k}}{\sqrt{\tilde{x}_{i-1/2}^2+\tilde{y}_j^2+\tilde{z}_k^2}}\right],$$

$$J6_i = \iint\limits_{X=X_i} \frac{j_y}{r}\,dydz = \sum_{j=2}^{M}\sum_{k=2}^{L}\frac{hyhz_k}{2}\left[\frac{j_y|_{i,j-1/2,k-1}}{\sqrt{\tilde{x}_i^2+\tilde{y}_{j-1/2}^2+\tilde{z}_{k-1}^2}}+\frac{j_y|_{i,j-1/2,k}}{\sqrt{\tilde{x}_i^2+\tilde{y}_{j-1/2}^2+\tilde{z}_k^2}}\right],$$

где $\tilde{x}_i = x_p - x_i$, $\tilde{y}_j = y_p - y_j$, $\tilde{z}_k = z_p - z_k$.

5. Численное моделирование магнитного поля от намагниченных конструкций электролизера

Для определения в точке наблюдения $\vec{q}$ напряженности магнитного поля, создаваемого объемом V ферромагнетика с намагниченностью $\vec{M}$, воспользуемся формулой [6]

$$\vec{H}(\vec{q}) = \frac{1}{4\pi}\nabla_{\vec{q}}\int\limits_V \left(\vec{M}(\vec{r})\nabla_{\vec{q}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{q}|}\right)dV, \tag{23}$$

где символом $\nabla_{\vec{q}}$ обозначен градиент скалярной функции, аргументами которой являются компоненты q_x, q_y, q_z точки наблюдения; $\vec{q}$, $\vec{r}$ — радиус-векторы точек наблюдения и интегрирования.

Результирующая напряженность поля в точке $\vec{q}$ найдется следующим образом:

$$\vec{H}(\vec{q}) = \vec{H}^0(\vec{q}) + \frac{1}{4\pi}\nabla_{\vec{q}}\int\limits_V \left(\vec{M}(\vec{r})\nabla_{\vec{q}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{q}|}\right)dV, \tag{24}$$

где

$$\vec{M} = \chi(H)\vec{H}, \tag{25}$$

$\vec{H}^0(\vec{q})$ — напряженность внешнего магнитного поля в точке $\vec{q}$.

Перепишем (24) в виде

$$\vec{H}(\vec{q}) = \vec{H}^0(\vec{q}) + \frac{1}{4\pi}\nabla_{\vec{q}}\int\limits_V \chi(H)\left(\vec{H}(\vec{r})\nabla_{\vec{q}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{q}|}\right)dV, \tag{26}$$

$\chi(H)$ определяется по следующей эмпирической формуле [3]:

$$\chi(H) = \frac{a}{b+H} \tag{27}$$

с кусочно-постоянными a и b. Такая аппроксимация качественно верно отражает характер изменения $\chi(H)$ во всем диапазоне индукций, включая участок насыщения. Значения a и b для различных H приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Значения коэффициентов для $\chi(H)$

H, ГА/м	a, ГА/м	b, ГА/м
$H < 4,183$	$-2529,564$	$-5,829$
$4,184 < H < 307,6$	$15371,892$	$5,798$
$H > 307,6$	$15072,4$	0

Уравнения (26), (27) позволяют получить замкнутую систему для определения $\vec{H}$ и $\vec{M}$ внутри объема ферромагнетика, а затем по формуле (24) и для любой заданной точки наблюдения.

Ферромагнитные конструкции электролизера имеют преимущественно прямоугольную форму (днище, боковые стенки кожуха ванны и др.). В связи с этим область V представима в виде набора параллелепипедов, каждый из которых, в свою очередь, разбивается на элементарные параллелепипеды V_i. В центре каждого V_i выбирается точка наблюдения $\vec{q}_i(q_{xi}, q_{yi}, q_{zi})$. Векторы намагниченности $\vec{M}$ и напряженности $\vec{H}$ в каждом V_i считаем постоянными.

Записывая уравнения (26) для центральных точек V_i, получаем следующую систему нелинейных уравнений относительно H_{xi}, H_{yi}, H_{zi}:

$$\begin{gathered} H_{xj} = H_{xj}^0 + \sum_{i=0}^{N}(a1_{ji}M_{xi} + a2_{ji}M_{yi} + a3_{ji}M_{zi}), \\ H_{yj} = H_{yj}^0 + \sum_{i=0}^{N}(a2_{ji}M_{xi} + a4_{ji}M_{yi} + a5_{ji}M_{zi}), \\ H_{zj} = H_{zj}^0 + \sum_{i=0}^{N}(a3_{ji}M_{xi} + a5_{ji}M_{yi} + a6_{ji}M_{zi}), \end{gathered} \tag{28}$$

где H_{xi}^0, H_{yi}^0, H_{zi}^0 — компоненты векторов напряженностей внешнего магнитного поля в точках $\vec{q}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, N — общее количество элементарных параллелепипедов (ферромагнитных элементов), а M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} определяются из (27). Таким образом, одновременно с решением системы (28) относительно компонентов векторов напряженности магнитного поля $\vec{H}_i$ будут определены намагниченности ферромагнитных элементов.

6. Алгоритм вычисления коэффициентов

Аналитические выражения для коэффициентов системы (28) получены в [4, 5]. Мы повторим здесь их вывод.

Для вывода коэффициентов выражение (23) записывается для элементарного объема V_E, выполняется скалярное умножение и знак градиента $\nabla_{\mathbf{q}}$ вносится под знак интеграла:

$$d\vec{H}(\vec{q}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{V_E} \nabla_{\vec{q}} \frac{M_x(x-q_x) + M_y(y-q_y) + M_z(z-q_z)}{\left((x-q_x)^2 + (y-q_y)^2 + (z-q_z)^2\right)^{3/2}} \, dV. \tag{29}$$

Поскольку мы полагали значения компонент M_x, M_y, M_z в пределах элементарного объема V_E постоянными, то очевидно, что градиент $\nabla_{\vec{q}}$ от подынтегрального выражения в (29) равен градиенту $\nabla_{\vec{r}}$ с обратным знаком:

$$d\vec{H}(\vec{q}) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{V_E} \nabla_{\vec{r}} \frac{M_x(x-q_x) + M_y(y-q_y) + M_z(z-q_z)}{\left((x-q_x)^2 + (y-q_y)^2 + (z-q_z)^2\right)^{3/2}} \, dV. \tag{30}$$

Используя теорему о градиенте

$$\int\limits_{V} \nabla F(\vec{r}) \, dV = \int\limits_{S} F(\vec{r}) \, d\vec{S},$$

запишем выражение (30) иначе:

$$d\vec{H}(\vec{q}) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_E} \frac{M_x(x-q_x) + M_y(y-q_y) + M_z(z-q_z)}{\left((x-q_x)^2 + (y-q_y)^2 + (z-q_z)^2\right)^{3/2}} \, d\vec{S}, \tag{31}$$

где S_E — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V_E, $d\vec{S}$ — внешняя нормаль к поверхности S_E длиной, равной величине элементарной площадки dS.

Для элементарного объема в виде параллелепипеда $\{x_1 \le x \le x_2,\ y_1 \le y \le y_2,\ z_1 \le z \le z_2\}$ со сторонами, параллельными осям координат, из (31) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
dH_x(\vec{q}) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{y_1}^{y_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} \left(\frac{x-q_x}{R^3} M_x + \frac{y-q_y}{R^3} M_y + \frac{z-q_z}{R^3} M_z \right) dydz \Bigg|_{x_1}^{x_2}, \\
dH_y(\vec{q}) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} \left(\frac{x-q_x}{R^3} M_x + \frac{y-q_y}{R^3} M_y + \frac{z-q_z}{R^3} M_z \right) dxdz \Bigg|_{y_1}^{y_2}, \\
dH_z(\vec{q}) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \left(\frac{x-q_x}{R^3} M_x + \frac{y-q_y}{R^3} M_y + \frac{z-q_z}{R^3} M_z \right) dxdy \Bigg|_{z_1}^{z_2}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Прямая черта в (32) означает разность между двойными интегралами, вычисленными для верхнего и нижнего параметров, указанных у черты. Выражения (32) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
dH_x(\vec{q}) &= a1M_x + a2M_y + a3M_z, \\
dH_y(\vec{q}) &= a2'M_x + a4M_y + a5M_z, \\
dH_z(\vec{q}) &= a3'M_x + a5'M_y + a6M_z.
\end{aligned} \tag{33}$$

Легко показать, что матрица коэффициентов в (33) является симметричной.

Из (32) следует

$$a1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{x-q_x}{R^3}\,dydz\Bigg|_{x_2}^{x_1}, \quad a3 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{z-q_z}{R^3}\,dydz\Bigg|_{x_2}^{x_1},$$

$$a5 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{z-q_z}{R^3}dxdz\Bigg|_{y_2}^{y_1}, \quad a2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{y-q_y}{R^3}\,dydz\Bigg|_{x_2}^{x_1},$$

$$a4 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{y-q_y}{R^3}\,dxdz\Bigg|_{y_2}^{y_1}, \quad a6 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\frac{z-q_z}{R^3}\,dxdy\Bigg|_{z_2}^{z_1},$$

где x_p, y_k, z_l $(p,k,l=1,2)$ — координаты вершин элементарного параллелепипеда, R — расстояние от точки интегрирования до точки наблюдения, $R=\sqrt{(x-q_x)^2+(y-q_y)^2+(z-q_z)^2}$.

Используя табличные интегралы и вводя обозначение

$$R_{pkl}=\sqrt{(x_p-q_x)^2+(y_k-q_y)^2+(z_l-q_z)^2}$$

для расстояния от точки наблюдения до вершины (x_p, y_k, z_l), получаем окончательно:

$$\begin{aligned}
a1 &= \frac{1}{4\pi}\sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}\arctan\frac{(y_k-q_y)(z_l-q_z)}{(x_p-q_x)R_{pkl}},\\
a4 &= \frac{1}{4\pi}\sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}\arctan\frac{(x_p-q_x)(z_l-q_z)}{(y_k-q_y)R_{pkl}},\\
a6 &= \frac{1}{4\pi}\sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}\arctan\frac{(x_p-q_x)(y_k-q_y)}{(z_l-q_z)R_{pkl}},\\
a2 &= \sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}\ln(z_l-q_z+R_{pkl}),\\
a3 &= \sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}\ln(y_k+q_y+R_{pkl}),\\
a5 &= \sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}\ln(x_p-q_x+R_{pkl}),
\end{aligned} \tag{34}$$

Для экономии времени вычисления коэффициентов значения элементарных функций и расстояний в общих вершинах параллелепипедов (площадок) определяются один раз в начале счета.

7. Алгоритм решения нелинейной системы уравнений

Система (28) записывается относительно компонент H_{xj}, H_{yj}, H_{zj} и решается итерационным методом с релаксацией:

$$H_{xj}^{k+1} = \Big(H_{xj}^0 - \sum_{i=1}^{j-1} \chi\big(H_i^{(k+1)}\big)\big(a1_{ji}H_{xi}^{(k+1)} + a2_{ji}H_{yi}^{(k+1)} + a3_{ji}H_{zi}^{(k+1)}\big) - \sum_{i=j+1}^{N} \chi\big(H_i^{(k)}\big)\big(a1_{ji}H_{xi}^{(k)} + a2_{ji}H_{yi}^{(k)} + a3_{ji}H_{zi}^{(k)}\big)\Big)\big(1 - a1_{j,j}\chi\big(H_j^{(k)}\big)\big)^{-1},$$

$$H_{yj}^{k+1} = \Big(H_{yj}^0 - \sum_{i=1}^{j-1} \chi\big(H_i^{(k+1)}\big)\big(a2_{ji}H_{xi}^{(k+1)} + a4_{ji}H_{yi}^{(k+1)} + a5_{ji}H_{zi}^{(k+1)}\big) - \sum_{i=j+1}^{N} \chi\big(H_i^{(k)}\big)\big(a2_{ji}H_{xi}^{(k)} + a4_{ji}H_{yi}^{(k)} + a5_{ji}H_{zi}^{(k)}\big)\Big)\big(1 - a4_{j,j}\chi\big(H_j^{(k)}\big)\big)^{-1}. \quad (35)$$

$$H_{zj}^{k+1} = \Big(H_{zj}^0 - \sum_{i=1}^{j-1} \chi\big(H_i^{(k+1)}\big)\big(a3_{ji}H_{xi}^{(k+1)} + a5_{ji}H_{yi}^{(k+1)} + a6_{ji}H_{zi}^{(k+1)}\big) - \sum_{i=j+1}^{N} \chi\big(H_i^{(k)}\big)\big(a3_{ji}H_{xi}^{(k)} + a5_{ji}H_{yi}^{(k)} + a6_{ji}H_{zi}^{(k)}\big)\Big)\big(1 - a6_{j,j}\chi\big(H_j^{(k)}\big)\big)^{-1},$$

$$j = 1, 2, \dots N, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots .$$

Начальные значения H_{xj}, H_{yj}, H_{zj} полагаются равными нулю. Величины магнитной восприимчивости $\chi\big(H_j^{(k)}\big)$ определяются по формуле (25).

Критерием окончания итераций является выполнение одного из условий:

$$R = \frac{\|\vec{X}^{k+1} - \vec{X}^k\|_\propto}{\|\vec{X}^k\|_\propto} \le \varepsilon, \qquad it = Ni, \quad (36)$$

где $\vec{X}^k$ — вектор с компонентами H_{xj}, H_{yj}, H_{zj} напряженности магнитного поля в N центральных точках ферромагнитных элементов на k-й итерации; ε — заданная погрешность; it — текущий номер итерации, Ni — заданное число итераций.

После окончания итераций компоненты вектора напряженности магнитного поля в любой точке наблюдения $\vec{q}$, расположенной вне ферромагнитных конструкций, могут быть вычислены из уравнений (28), где H_{xj}^0, H_{yj}^0, H_{zj}^0 — компоненты внешнего магнитного поля в j-й точке наблюдения $\vec{q}$, а коэффициенты должны быть предварительно вычислены по формулам (34).

8. Методика учета влияния соседних электролизеров

На магнитное поле каждого электролизера накладываются магнитные поля, создаваемые другими электролизерами серии. Однако для расчетов достаточно учитывать вклад только от ближайших электролизеров. В силу симметрии предполагается, что каждая пара электролизеров оказывает друг на друга одинаковое по величине влияние.

Покажем, как учитывается влияние соседних электролизеров на примере двухрядного продольного расположения (рис. 3). Выделим электролизер, находящийся в середине серии под номером 3, и введем систему координат x, y, z, привязанную к этому электролизеру так, как описано в разделе 3.

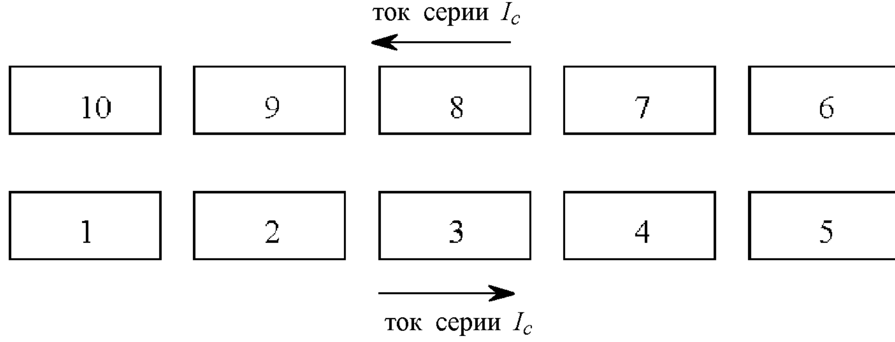


Рис. 3. Двухрядное продольное расположение электролизеров

При расчете магнитного поля, возбуждаемого соседним электролизером, в точке наблюдения с координатами x, y, z необходимо пересчитать эти координаты в новой системе координат x', y', z', привязанной к соседнему электролизеру по формулам

$$\begin{gathered} x' = \begin{cases} h_э + x & \text{для электролизера 2,} \\ x - h_э & \text{для 4,} \\ -x & \text{для 8,} \\ h_э - x & \text{для 7,} \\ -h_э - x & \text{для 9;} \end{cases} \\ y' = \begin{cases} y & \text{для электролизеров 2, 4,} \\ s_р - y & \text{для 7, 8, 9;} \end{cases} \\ z' = z \quad \text{для всех электролизеров,} \end{gathered} \tag{37}$$

где $h_э$ — величина шага электролизеров (расстояние между центрами электролизеров вдоль оси OX); $s_р$ — расстояние между рядами электролизеров (расстояние между центрами электролизеров вдоль оси OY).

Таким образом, расчет магнитного поля с учетом влияния электролизеров, соседних с электролизером 3, сводится к вычислению составляющих магнитных полей, порожденных электролизером 3 в определенных точках с координатами, пересчитанными по формулам (37), и последующему векторному сложению найденных магнитных полей с собственным полем анализируемого электролизера в таких же точках. При этом должно учитываться, что нужно добавить вклады от электролизеров соседнего ряда, предварительно развернув их поля на 180° вокруг своей оси.

9. Результаты расчетов

Проверка программных модулей расчета магнитного поля осуществлялась на Саянском алюминиевом заводе с участием одного из авторов путем сравнения результатов расчета с данными многократных измерений поля в электролизерах одного типа. Точки наблюдений располагались в средней горизонтальной плоскости расплава в проекциях продольных сторон анодного массива симметрично осям ванны. Исследованы четыре типа промышленных электролизеров различной конструкции, силы тока на момент измерений и расположения в электролизерном корпусе.

Сравнивались наиболее влияющие на магнитную гидродинамику компоненты магнитного поля: B_x — для поперечного, B_y — для продольного расположения электролизеров и вертикальная компонента B_z. В табл. 2 приведены погрешности вычислений каждой из компонент относительно измеренных значений, определенные по формуле

$$\delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i - \widetilde{x}_i|}{x} \times 100\,\%,$$

где x_i, $\tilde{x}_i$ — вычисленные и средние измеренные значения компоненты для i-й точки наблюдения; n — количество точек наблюдений; x — максимальная шкала, относительно которой выполнен расчет погрешности (в данном случае $x = 100$ Гс). Относительное снижение погрешности в табл. 2 показывает, во сколько раз увеличилась точность расчетов с учетом влияния ферромагнетиков относительно расчетов без учета влияния ферромагнетиков.

Таблица 2

Относительные погрешности вычислений

Тип электролизера	Без учета влияния ферромагнетиков, %		С учетом влияния ферромагнетиков, %		Относительное снижение погрешности	
	B_x, B_y	B_z	B_x, B_y	B_z	B_x, B_y	B_z
1	6,3	14,7	3,4	9,0	1,9	1,6
2	15,0	6,9	4,8	4,0	3,1	1,7
3	15,3	11,5	10,5	9,4	1,5	1,2
4	12,9	12,7	8,7	6,0	1,5	2,1
Среднее	12,4	11,5	6,9	7,1	1,8	1,6

Сравнивая погрешности расчетов без учета влияния ферромагнитных конструкций относительно измеренных значений, можно сделать вывод о существенном влиянии на магнитное поле стальных конструкций ванн. Это видно, например, из величин погрешностей компонент B_y электролизера типа 2 и B_x электролизера типа 3. Из табл. 2 видно, что средняя погрешность вычисления магнитного поля относительно измеренных данных для максимальной шкалы в 100 Гс составляет 7 %, а точность расчета магнитного поля с учетом влияния ферромагнетиков повышается примерно в два раза по отношению к расчету без учета влияния ферромагнетиков.

Рассматривались ферромагнитные конструкции из двенадцати параллелепипедов, имеющих форму прямоугольных листов с характерными размерами $1110 \times 470 \times 1$, $1200 \times 1 \times 150$, $2 \times 450 \times 150$ см. Для исследования сходимости итерационного процесса проводились расчеты для разных чисел разбиений ферромагнитных конструкций (табл. 3).

Таблица 3

Числа итераций для электролизера

Число разбиений	Начальное значение R	Число итераций	Конечное значение R
70	2000	10	0,0058
226	2500	16	0,0014
403	2000	22	0,0031
718	1600	25	0,0038

Сначала наблюдается быстрая сходимость итерационного процесса, однако по достижении числа итераций, указанного в третьей колонке табл. 3, значение R, определяемое по формуле (36), практически не меняется. В целом точность расчетов является удовлетворительной (см. табл. 2), но для использования более адекватных численных моделей требуются алгоритмы, позволяющие вести расчеты для больших чисел разбиений ферромагнитных конструкций. В связи с этим, предметом дальнейших исследований является использование дополнительных методов, например методов неполных факторизаций [7] для решения системы (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисоглебский Ю. В.* Расчет и проектирование алюминиевых электролизеров. Л.: изд. Ленинград. политех. ин-та, 1981.
2. *Меерович Э. А.* Магнитное поле и электродинамические силы в зоне расплава мощных электролизеров алюминия. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
3. *Дойников Н. И.* Результаты математического моделирования полей и оптимизация параметров магнитных систем. Л.: изд. Ин-та электрофиз. аппаратуры, 1981.
4. *Альчиков В. В.* Вывод аналитических выражений для интегралов в расчетах магнитных полей алюминиевых электролизеров с учетом влияния ферромагнетиков // Кубатурные формулы и их приложения: Тез. докл. V Междунар. семинара-совещания. Красноярск, изд. гос. техн. ун-та, 1999. С. 3–4.
5. *Альчиков В. В., Платонов В. В.* Программа компьютерного моделирования магнитных полей электролизеров с учетом влияния ферромагнетиков // Междунар. семинар «Алюминий Сибири–95»: Сб. докл. Красноярск: изд. Красноярск. алюмин. завода, 1995. С. 186–192.
6. *Акишин П. Г., Жидков Е. П., Кравцов В. Д.* Об одном устойчивом алгоритме решения интегральных уравнений магнитостатики. Дубна, 1986. (Препринт / Объед. ин-т ядер. исследований; Р11–86–718).
7. *Ильин В. П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматгиз, 1995.

г. Красноярск
Красноярский гос. технический университет
E-mail: Bykov@fivt.kgtu.runnet.ru

Статья поступила 29 июля 2001 г.
Окончательный вариант 29 октября 2001 г.